例数制限付き教示の複雑さ

Complexity of Teaching by a Limited Number of Examples

小林 隼人　　篠原 歩
Hayato Kobayashi　　Ayumi Shinohara

東北大学 大学院情報科学研究科
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

1　はじめに

計算学習理論は，人間の高度な知的行動である**学習**を数学的に定式化し，その性質を解明することを目的とした研究領域である．これまでに，帰納推論，PAC 学習，質問学習などの学習モデルを用いて様々に研究が行われている．一方で，学習と表裏一体をなす**教示**に関しても，様々な教示モデルを用いて盛んに研究が行われている [1, 2, 3, 4, 5]．これらの研究では教示に必要な例数を複雑さの指標にしているが，本研究では例数が制限された状況を考えたい．

例数制限のある状況を議論することは，教示の理論を現実世界に近づけることに他ならない．実際，人に何かを教えるとき，時間（例数）が制限されている方が一般的である．例えば，学校の教師は授業時間内に，すべての学生に授業内容を理解させる必要がある．就職面接での自己アピールや，研究成果のプレゼンテーションなども時間が制限された状況の好例である．その他にも，ロボットとの対話式の学習などは，コストの問題により試行回数が制限される場合が多い．本論文で提案する教示モデルは，これらの現実世界の状況をモデル化したものである．

2　準備

X を**入力空間**とする．$\mathcal{X} = X \times \{0,1\}$ を**例集合**とする．$\mathcal{C} \subseteq 2^X$ を**概念クラス**と呼び，$c \in \mathcal{C}$ を**概念**と呼ぶ．ここで，$\mathcal{X}(c) := \{(x,b) \in \mathcal{X} \mid x \in c \Leftrightarrow b = 1\}$ とする．例 $(x,b) \in \mathcal{X}$ は，$(x,b) \in \mathcal{X}(c)$ であるとき，かつそのときに限り，c と**無矛盾**であるという．例集合 $S \subseteq \mathcal{X}$ と無矛盾な概念クラス $\mathcal{C}$ 中の概念の集合を $\mathit{CONS}(S,C) := \{c \in \mathcal{C} \mid S \subseteq \mathcal{X}(c)\}$ と表す．

2 つの概念 $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$ の**対称差**を $c_1 \Delta c_2$ で表す．すなわち，$c_1 \Delta c_2 := (c_1 - c_2) \cup (c_2 - c_1)$．2 つの概念 c_1 と c_2 の分布 D に関する**誤差**は，$d_D(c_1,c_2) := \sum_{x \in c_1 \Delta c_2} \Pr_D(x)$ で表される．本論文では，X が有限で，確率分布 D は一様分布と仮定するため，D を省略し，$d(c_1,c_2)$ と書く．すなわち，$d(c_1,c_2) := |c_1 \Delta c_2|/|X|$．

例集合 S が $\mathcal{C}$ に関する c の**教示集合**であるとは，S と無矛盾な $\mathcal{C}$ 中の概念が c だけであるとき，すなわち $\mathit{CONS}(S,\mathcal{C}) = \{c\}$ のときをいう．$\mathcal{C}$ における c に対するすべての教示集合の族を $\mathit{TS}(c,\mathcal{C}) := \{S \subseteq \mathcal{X} \mid \mathit{CONS}(S,\mathcal{C}) = \{c\}\}$ と表す．$\mathcal{C}$ に関する概念 c の**教示次元** $\mathit{TD}(c,\mathcal{C})$ を，最小の教示集合の大きさで定義する．すなわち，$\mathit{TD}(c,\mathcal{C}) := \min\{|S| \mid S \in \mathit{TS}(c,\mathcal{C})\}$．概念クラス $\mathcal{C}$ の教示次元 $\mathit{TD}(\mathcal{C}) := \max_{c \in \mathcal{C}} \mathit{TD}(c,\mathcal{C})$ は，$\mathcal{C}$ 中の概念の最大の教示次元で定義される．$\mathcal{C}$ に関する c の最小の教示集合の族を $\mathit{MinTS}(c,\mathcal{C}) := \{S \in \mathit{TS}(c,S) \mid |S| = \mathit{TD}(c,\mathcal{C})\}$ と書く．

3　例数制限付き教示モデル

我々のモデルでは，教師が学習者に与えることのできる例数が制限されているため，学習者に目標概念を特定させることができない場合がある．そこで，目標概念との誤差を教示の複雑さの指標にすることを考える．このとき，元々の教示モデルと同様に最悪時の学習者を想定し，次のように定式化する．

定義 1 (教示誤差)**.** $\mathcal{C}$ を概念クラス，$c \in \mathcal{C}$ を目標概念とする．任意の例集合 $S \subseteq \mathcal{X}$ について，**S による $\mathcal{C}$ についての c の教示誤差**を次式で定義する．

$$\mathit{TE}(c,\mathcal{C},S) := \begin{cases} \max\limits_{c' \in \mathit{CONS}(S,\mathcal{C})} d(c,c') & (\mathit{CONS}(S,\mathcal{C}) \neq \emptyset), \\ 1 & (otherwise) \end{cases}$$

例数が k に制限された状況において，ある概念の教示の複雑さを，k 以下の例で達成しうる最小の教示誤差で表す．我々はこれを最適教示誤差と呼び，次のように定義する．

定義 2 (最適教示誤差)**.** $\mathcal{C}$ を概念クラス，$c \in \mathcal{C}$ を目標概念とする．**高々 k 個の例による $\mathcal{C}$ についての c の最適教示誤差**を次式で定義する．

$$\mathit{OptTE}_k(c,\mathcal{C}) := \min_{S \subseteq \mathcal{X}: |S| \leq k} \mathit{TE}(c,\mathcal{C},S)$$

また，**高々 k 個の例による $\mathcal{C}$ の最適教示誤差**を次式で定義する．

$$\mathit{OptTE}_k(\mathcal{C}) := \max_{c \in \mathcal{C}} \mathit{OptTE}_k(c,\mathcal{C})$$

概念 $c \in \mathcal{C}$ について，最適教示誤差となる大きさ k 以下の例集合を k-**最適教示集合**と呼び，その族を $\mathit{OptTS}_k(c,\mathcal{C}) := \{S \subseteq \mathcal{X} \mid |S| \leq k, \mathit{TE}(c,\mathcal{C},S) = \mathit{OptTE}_k(c,\mathcal{C})\}$ とする．

最適教示誤差は，0 から 1 の値をとり，小さいほどよい．例数制限 k が $k \geq \mathit{TD}(c,\mathcal{C})$ のとき，適当な例集合 $S' \in \mathit{MinTS}(c,\mathcal{C})$ により目標概念を一意に特定できるので常に $\mathit{OptTE}_k(c,\mathcal{C}) = 0$ である．したがって，本研究では $k < \mathit{TD}(c,\mathcal{C})$ のときに焦点を絞る．

次の 2 つの定理は，このモデルの重要な性質を示す．

表 1　既存の結果と本研究の結果 (†).

$\mathcal{C}$	$\mathcal{M}_n^+$	$\mathcal{M}'_n$	$\mathcal{M}_n$
TD($\mathcal{C}$)	n	$n+1$	2^n
教示可能性	可能	可能	不可能
OptTE$_k(\mathcal{C})^\dagger$	$\dfrac{2^{n-k}-1}{2^n}$	$\dfrac{2^{n-k+1}-1}{2^n}$	$\begin{cases} \dfrac{2^{n-k+1}-1}{2^n} & (k \le 2) \\ \dfrac{2^{n-k+1}}{2^n} & (2 < k \le n) \\ \dfrac{1}{2^n} & (n < k) \end{cases}$
最適漸増教示可能性 †	可能	不可能	不可能

定理 3. 次式を満たす概念クラス $\mathcal{C}$，目標概念 $c \in \mathcal{C}$，整数 $k > 0$ が存在する．

$$\forall S_1 \in \mathit{OptTS}_k(c,\mathcal{C}), \forall S_2 \in \mathit{MinTS}(c,\mathcal{C}), \quad S_1 \not\subseteq S_2.$$

定理 4. 次式を満たす概念クラス $\mathcal{C}$，目標概念 $c \in \mathcal{C}$，整数 $k > 0$ が存在する．

$$\forall S \in \mathit{OptTS}_k(c,\mathcal{C}), \quad c \notin \mathit{CONS}(S,\mathcal{C}).$$

定理 3 と定理 4 は，我々のモデルにおける最適な教示戦略が通常とは異なりうることを意味している．例の個数が制限されている環境で最大の教示効果を得るためには，一般には例数制限 k に依存した教示戦略を考える必要がある．

ある概念クラスについて，例数制限 k に依存しない教示戦略で常に最適に教示できるとき，その概念クラスはいくらか教示が簡単といえる．我々はこれを最適漸増教示可能性として次のように定義する．

定義 5 (最適漸増教示可能性)**.** $\mathcal{C}$ を概念クラス，$c \in \mathcal{C}$ を目標概念とする．$K := \mathit{TD}(c,\mathcal{C})$ とする．次式を満たす例リスト $\langle z_1, z_2, \cdots, z_K \rangle$ が存在するとき，**$\mathcal{C}$ について c は最適漸増教示可能**であるという．

$$\forall k \in [1,K], \quad \{z_1,\cdots,z_k\} \in \mathit{OptTS}_k(c,\mathcal{C}),$$

$\mathcal{C}$ の任意の概念 $c \in \mathcal{C}$ が最適漸増教示可能であるとき，**$\mathcal{C}$ は最適漸増教示可能**であるという．

4　単項式概念クラスの教示複雑さ

n 変数 $v_1, \cdots, v_n$ 上の**単項式**とは，リテラル $v_i, \overline{v_i}$ のいくつかの積で表されるブール式をいう．入力空間を $X_n = \{0,1\}^n$ とし，ブール式を充足する代入の集合として表される概念を考える．n 変数の単項式によって表される概念クラスを $\mathcal{M}_n$ で表す．$v_i \wedge \overline{v_i}$ のように同じ変数の正負のリテラルを含む単項式が表す概念は空集合となるが，これを以後，空概念と呼び c_e と表す．$\mathcal{M}_n$ から空概念を除いた概念クラスを $\mathcal{M}'_n$ と表す．すなわち，$\mathcal{M}'_n := \mathcal{M}_n - \{c_e\}$．正のリテラルのみからなる単項式を**単調単項式**と呼び，n 変数の単調単項式によって表される概念クラスを $\mathcal{M}_n^+$ で表す．$\mathcal{M}_n^+ \subset \mathcal{M}'_n \subset \mathcal{M}_n$ である．

表 1 に $\mathcal{M}_n^+$，$\mathcal{M}'_n$，$\mathcal{M}_n$ の最適教示誤差と最適漸増教示可能性の結果を示す．最適教示誤差については，例数制限 k に関係なく教示次元が大きくなるほど最適教示誤差も大きくなっており，教示次元と同様の傾向が見られた．しかし，最適漸増教示可能性については (多項式時間) 教示可能性とは異なる結果が得られた．ここで，入力空間 $X_n := \{0,1\}^n$ のすべての部分集合からなる概念クラス $\mathcal{D}_n := 2^{X_n}$ を考える．明らかに $\mathcal{D}_n$ は教示可能ではないが，最適漸増教示可能である．したがって，最適漸増教示可能な概念クラスの族と教示可能な概念クラスの族は比較不可能である．

次の定理は，空概念 $c_e \in \mathcal{M}_n$ を最適に教示するために，教師は矛盾した例を学習者に与えなければならないことを意味する．

定理 6. 任意の整数 $k \in [5, 2^{n-1}-1]$ について次式が成り立つ．

$$\forall S \in \mathit{OptTS}_k(c_e,\mathcal{M}_n), \quad c_e \notin \mathit{CONS}(S,\mathcal{M}_n).$$

5　まとめ

本研究では，例数制限付き教示の複雑さを定式化し，3 つの概念クラス (単調単項式，空概念を除く単項式，単項式) についての解析を行った．得られた結果は，時間が限られている状況で物事を説明するときに，なるべく説明を簡略化し，場合によっては多少の嘘を交えたほうが相手に趣旨が伝わりやすいという経験則とよく合致している．

参考文献

[1] Ayumi Shinohara and Satoru Miyano. Teachability in Computational Learning. *New Generation Computing*, Vol. 8, No. 4, pp. 337–347, 1991.

[2] Sally A. Goldman and Michael J. Kearns. On the Complexity of Teaching. *Journal of Computer and System Sciences*, Vol. 50, pp. 303–314, 1995.

[3] Homin K. Lee, Rocco A. Servedio, and Andrew Wan. DNF are teachable in the average case. *Machine Learning*, Vol. 69, No. 2–3, pp. 79–96, 2007.

[4] Frank J. Balbach. Measuring teachability using variants of the teaching dimension. *Theoretical Computer Science*, Vol. 397, No. 1–3, pp. 94–113, 2008.

[5] Sandra Zilles, Steffen Lange, Robert Holte, and Martin Zinkevich. Teaching Dimensions Based on Cooperative Learning. In *Proceedings of the 21st Annual Conference on Learning Theory (COLT 2008)*, pp. 135–146. Omnipress, 2008.