社団法人　電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
TECHNICAL REPORT OF IEICE.

無限 n-ボナッチ文字列の繰り返し構造について

佐々木崇人† 大崎 嗣豊† 石野 明† 篠原 歩†

† 東北大学大学院 情報科学研究科
〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-05
E-mail: †{takahito,osaki}@shino.tohoku.ecei.ac.jp, ††{ishino,ayumi}@tohoku.ecei.ac.jp

あらまし 隣接 2 項の漸化式で表されるフィボナッチ文字列を一般化し，隣接 n 項の漸化式で n-ボナッチ文字列を定義する．本研究では，任意の $n \geqq 2$ に対して，無限 n-ボナッチ文字列における第 k 項目の有限 n-ボナッチ文字列の最大連続出現数は $k \to \infty$ のとき $2 + 1/(\phi^{(n)} - 1)$ に収束することを証明する．ここに，$\phi^{(n)}$ は n-ボナッチ定数であり，特に $\phi^{(2)} = (1 + \sqrt{5})/2$ は黄金比として知られている．さらに，n を増加させると，最大連続数はちょうど 3 に近づくことを示す．

キーワード フィボナッチ数，フィボナッチ文字列，繰り返し構造，黄金比

Repetitions in the infinite n-bonacci word

Takahito SASAKI†, Tsugutoyo OSAKI†, Akira ISHINO†, and Ayumi SHINOHARA†

† Department of System Information Sciences, GSIS, Tohoku University,
Aoba-yama 6-6-05, Aoba-ku, Sendai-city, Miyagi, 980-8579, Japan
E-mail: †{takahito,osaki}@shino.tohoku.ecei.ac.jp, ††{ishino,ayumi}@tohoku.ecei.ac.jp

Abstract The Fibonacci word F_m is defined as the concatenation of the preceding two Fibonacci words F_{m-1} and F_{m-2}. We generalize it to the n-bonacci word as the concatenation of the preceding n words. We consider the structure of the subword repetitions in the n-bonacci word. In Fibonacci word ($n = 2$), the maximal repetition of the subword is known to be less than $2 + \phi$, where $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$ is the golden ratio. We give a general result for any $n \geqq 2$. We prove that the maximal repetition of the finite k-th n-bonacci word in the infinite n-bonacci word converges to $2 + 1/(\phi^{(n)} - 1)$ as $k \to \infty$, and it approaches to 3 as $n \to \infty$, where $\phi^{(n)}$ is the n-bonacci constant and $\phi^{(2)} = \phi$.

Key words Fibonacci number, Fibonacci word, repetition, golden ratio

1. まえがき

隣接 2 項の漸化式で定義される**フィボナッチ数列**は，

$$\Phi_0 = 1, \quad \Phi_1 = 2,$$
$$\Phi_m = \Phi_{m-1} + \Phi_{m-2} \quad (m \geqq 2)$$

である．漸化式 $\Phi_m = \Phi_{m-1} + \Phi_{m-2}$ から導かれる特性方程式 $x^2 = x + 1$ の正の実数解 $(1 + \sqrt{5})/2$ は**黄金比**として知られており，ϕ と表記される．また，これは**フィボナッチ定数**とも呼ばれ，フィボナッチ数の隣接 2 項の比の極限がこの値と等しくなる．

フィボナッチ数列は隣接 2 項の数の和で生成されるが，これを文字に置き換え，次のように隣接 2 項の文字列の連結として生成される文字列がフィボナッチ文字列 F_m である．

$$F_0 = \mathtt{a}, \quad F_1 = \mathtt{ab}, \quad F_m = F_{m-1}F_{m-2} \quad (m \geqq 2).$$

よって，任意の $m \geqq 0$ について $|F_m| = \Phi_m$ となる．フィボナッチ文字列の初めの数項は次のようになる．

$$F_2 = \mathtt{aba},$$
$$F_3 = \mathtt{abaab},$$
$$F_4 = \mathtt{abaababa}.$$

また，文字列 w における部分文字列 u の繰り返し（連続出現），および繰り返し数を次のように定義する．

定義 1. 文字列 u，v，w が

$$w = uu...uv = u^k v \quad (v \text{ は } u \text{ の接頭辞})$$

であり，$k \geqq 2$ であるとき，文字列 w は u の繰り返しであるといい，

$$e = \frac{|w|}{|u|} = k + \frac{|v|}{|u|}$$

を文字列 u の繰り返し数という．

フィボナッチ数は自然現象のあらゆるところに出現し，面白い性質を示すことが知られている．フィボナッチ文字列も部分文字列のグラフ化問題や組み合わせ問題等においてさまざまな性質を持つことが知られている [1]〜[3]．そのひとつとして，Knuth-Morris-Pratt アルゴリズム [4] や Boyer-Moore アルゴリズム [5]，Aho-Corasick アルゴリズム [6] といった文字列のパターンマッチングアルゴリズムにおいて最悪の入力インスタンスとなることが知られている [7]．特に，Knuth-Morris-Pratt アルゴリズムでは，マッチングに失敗したときにキーワードの何文字目と照合すればよいかという情報を用いて再照合を行うが，キーワードの長さを z としたとき，この再照合の回数が高々 $\log_\phi z + 1$ 回であることが証明されている [4]．

Mignosi と Pirillo は無限フィボナッチ文字列中における m 番目の有限フィボナッチ文字列の最大繰り返し数について，無限フィボナッチ文字列中に $2 + \phi \approx 3.618$ 回を超える部分文字列の繰り返し出現はないことを証明した [8]．また，Borel と Reutenauer は発射角を ϕ としたときのビリヤードワードがフィボナッチ文字列になることを示した [9]．このように，フィボナッチ文字列とフィボナッチ定数 ϕ の間には強い関連性がある．

本研究では，隣接 n 項の文字列を連結したものとして定義される n-ボナッチ文字列と n-ボナッチ定数 $\phi^{(n)}$ との関連を明らかにする．フィボナッチ文字列の場合 $n = 2$ となり，その最大繰り返し数の極限は $2 + \phi^{(2)}$ である．では，$n > 2$ における一般的な最大繰り返し数の極限はどのように表現されるだろうか? フィボナッチ文字列の場合ではフィボナッチ定数 $\phi^{(2)}$ がそのままの形で現れたので，直感的には $2 + \phi^{(n)}$ となりそうであるが，実際には $2 + 1/(\phi^{(n)} - 1)$ となることを本研究で示す．特に $n = 2$ のとき，$\phi^{(2)} = 1/(\phi^{(2)} - 1)$ であり，これは Mignosi と Pirillo の結果と一致する．

2. n-ボナッチ文字列の定義

ϵ を空文字とする．文字列 u_0，u_1，u_2，... の連結を，整数 i，j を用いて次のように表現する．

$$u_{[i\nearrow j]} = \begin{cases} u_i u_{i+1} u_{i+2} \dots u_{j-1} u_j & (i \leqq j) \\ \epsilon & (i > j), \end{cases}$$

$$u_{[i\searrow j]} = \begin{cases} u_i u_{i-1} u_{i-2} \dots u_{j+1} u_j & (i \geqq j) \\ \epsilon & (i < j). \end{cases}$$

さらに，$u_i u_{i+1} u_{i+2} \dots$ のように文字列を無限に連結してできる文字列を $u_{[i\nearrow\infty]}$ と表す．

n-ボナッチ数は次のように定義される．

$$\Phi_0^{(n)} = 1,$$

$$\Phi_m^{(n)} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=0}^{m-1} \Phi_i^{(n)} + 1 = 2^m & (1 \leqq m < n), \\ \displaystyle\sum_{i=m-i}^{m-1} \Phi_i^{(n)} & (m \geqq n). \end{cases}$$

これを元に，n-ボナッチ文字列を次のように定義する．

定義 2. n を 2 以上の整数とし，アルファベット $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n\}$ とする．次の漸化式で定義される文字列を ***n*-ボナッチ文字列**という．

$$F_0^{(n)} = \sigma_1,$$

$$F_m^{(n)} = \begin{cases} \epsilon & (n < 0), \\ F_{[m-1\searrow 0]}^{(n)} \sigma_{m+1} & (0 < m < n), \\ F_{[m-1\searrow m-n]}^{(n)} & (m \geqq n). \end{cases} \tag{1}$$

例 1. $n = 3$ のとき，アルファベット $\Sigma = \{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}$ とすると，

$$F_0^{(3)} = \mathsf{a},$$
$$F_1^{(3)} = F_0^{(3)}\mathsf{b} = \mathsf{ab},$$
$$F_2^{(3)} = F_1^{(3)} F_0^{(3)} \mathsf{c} = \mathsf{abac},$$
$$F_m^{(3)} = F_{m-1}^{(3)} F_{m-2}^{(3)} F_{m-3}^{(3)} \quad (m \geqq 3).$$

となる．また，初めの数項は以下のようになる．

$$F_3^{(3)} = \mathsf{abacaba},$$
$$F_4^{(3)} = \mathsf{abacabaabacab},$$
$$F_5^{(3)} = \mathsf{abacabaabacababacabaabac}.$$

これはトリボナッチ文字列とも呼ばれる [10], [11]． ■

n-ボナッチ数と n-ボナッチ文字列には，$\left|F_m^{(n)}\right| = \Phi_m^{(n)}$ という関係がある．また，無限 n-ボナッチ文字列 $F_\infty^{(n)}$ も定義でき，全ての有限 n-ボナッチ文字列を接頭辞として持っている．

例 2. $n = 3$ のとき，無限トリボナッチ文字列は次のようになる．

$$F_\infty^{(3)} = \mathsf{abacabaabacababacabaabacabacabaab}\dots$$

■

ここで，文字列 u を反転した文字列を $rev(u)$ とする．$R_m^{(n)} = rev\left(F_m^{(n)}\right)$，$G_m^{(n)} = R_0^{(n)} R_1^{(n)} R_2^{(n)} \dots R_{m-3}^{(n)} R_{m-2}^{(n)} = R_{[0\nearrow m-2]}^{(n)}$ とすると，$m \geqq 2$ を満たす任意の m について次の補題が成り立つ．

補題 1. m，$n \geqq 2$ を満たす任意の整数 m，n について，$G_m^{(n)} = rev\left(G_m^{(n)}\right)$ である．すなわち，$G_m^{(n)}$ は回文である．

証明. m についての数学的帰納法を用いる．$m = 2$ のときは $R_0^{(n)} = \sigma_1$ なので明らかに仮定が成立する．$2 < m < n - 2$ のとき，

$$\begin{aligned} G_m^{(n)} &= R_{[0\nearrow m-2]}^{(n)} \\ &= R_{[0\nearrow m-3]}^{(n)} \sigma_{m-1} R_{[0\nearrow m-3]}^{(n)} \\ &= G_{m-1}^{(n)} \sigma_{m-1} G_{m-1}^{(n)}. \end{aligned}$$

帰納法の仮定から，$G_{m-1}^{(n)} = rev\left(G_{m-1}^{(n)}\right)$ である．よって，

$$\begin{aligned} & G_{m-1}^{(n)} \sigma_{m-1} G_{m-1}^{(n)} \\ =& rev\left(G_{m-1}^{(n)}\right) \sigma_{m-1} rev\left(G_{m-1}^{(n)}\right) \\ =& rev\left(G_{m-1}^{(n)} \sigma_{m-1} G_{m-1}^{(n)}\right) \\ =& rev\left(G_m^{(n)}\right) \end{aligned}$$

となり，$G_m^{(n)} = rev\left(G_m^{(n)}\right)$ である．$m \geqq n-2$ のとき，

$$\begin{aligned} G_m^{(n)} &= R_{[0\nearrow m-2]}^{(n)} \\ &= R_{[0\nearrow m-3]}^{(n)} R_{m-2}^{(n)} \\ &= G_{m-1}^{(n)} R_{m-2}^{(n)}. \end{aligned} \tag{2}$$

帰納法の仮定から，$G_{m-1}^{(n)} = rev\left(G_{m-1}^{(n)}\right)$ である．ここで，

$$\begin{aligned} &G_{m-1}^{(n)} \\ =&rev\left(G_{m-1}^{(n)}\right) \\ =&rev\left(R_{[0\nearrow m-3]}^{(n)}\right) \\ =&rev\left(R_{m-3}^{(n)}\right) rev\left(R_{m-4}^{(n)}\right) ...rev\left(R_0^{(n)}\right) \\ =&F_{[m-3\searrow 0]}^{(n)} \end{aligned}$$

なので，式（2）は次のようになる．

$$\begin{aligned} &G_m^{(n)} \\ =&F_{[m-3\searrow 0]}^{(n)} R_{m-2}^{(n)} \\ =&F_{[m-3\searrow m-n-3]}^{(n)} F_{[m-j-4\searrow 0]}^{(n)} R_{m-2}^{(n)} \\ =&F_{m-2}^{(n)} rev\left(R_{m-n-4}^{(n)}\right) ...rev\left(R_1^{(n)}\right) rev\left(R_0^{(n)}\right) R_{m-2}^{(n)} \\ =&F_{m-2}^{(n)} rev\left(R_{[0\nearrow m-n-4]}^{(n)}\right) R_{m-2}^{(n)} \\ =&F_{m-2}^{(n)} rev\left(G_{m-n-2}^{(n)}\right) R_{m-2}^{(n)} \\ =&rev\left(R_{m-2}^{(n)}\right) rev\left(G_{m-n-2}^{(n)}\right) rev\left(F_{m-2}^{(n)}\right) \\ =&rev\left(F_{m-2}^{(n)} G_{m-n-2}^{(n)} R_{m-2}^{(n)}\right) \\ =&rev\left(G_m^{(n)}\right). \end{aligned}$$

よって，$G_m^{(n)} = rev\left(G_m^{(n)}\right)$ である．以上のことから，$m \geqq 2$ を満たす任意の m について $G_m^{(n)} = rev\left(G_m^{(n)}\right)$ となることが証明された． □

例 3. $n = 3$，$m = 5$ の場合，

$$\begin{aligned} G_5^{(3)} &= R_0^{(3)} R_1^{(3)} R_2^{(3)} R_3^{(3)} \\ &= \mathsf{abacabaabacaba} = rev\left(G_5^{(3)}\right). \end{aligned}$$

■

文字列 u について，u の s 文字分の接尾辞を $Last\,(u, s)$ とおく． 特に $s = s(m, n) = \left|F_m^{(n)}\right| - \left|G_m^{(n)}\right|$ とすると，$F_m^{(n)}$ について次の補題を得る．

補題 2. $2 \leqq n \leqq m$ を満たす任意の m，n について，

$$F_m^{(n)} = G_m^{(n)} rev\left(Last\left(F_{m-1}^{(n)},\ s(m, n)\right)\right).$$

つまり，$F_m^{(n)}$ は $G_m^{(n)}$ を接頭辞として持ち，残る $s(m, n)$ 文字分の接尾辞は $m-1$ 番目の n-ボナッチ文字列 $F_{m-1}^{(n)}$ の $s(m, n)$ 文字分の接尾辞を反転させたものと等しい．

証明. 補題 1 より，$m \geqq 2$ を満たす任意の m について $G_m^{(n)} = rev\left(G_m^{(n)}\right)$ である．ここで，$G_{m+1}^{(n)}$ と $rev\left(G_{m+1}^{(n)}\right)$ はそれぞれ次のようになる．

$$\begin{aligned} G_{m+1}^{(j)} &= R_{[0\nearrow m-1]}^{(n)} \\ &= R_{[0\nearrow m-2]}^{(n)} R_{m-1}^{(n)} = G_m^{(n)} R_{m-1}^{(n)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} rev\left(G_{m+1}^{(n)}\right) =&F_{[m-1\searrow 0]}^{(n)} \\ =&F_{[m-1\searrow m-n-1]}^{(n)} F_{[m-n-2\searrow 0]}^{(n)} \\ =&F_m^{(n)} F_{[m-n-2\searrow 0]}^{(n)} \\ =&F_m^{(n)} rev\left(R_{m-n-2}^{(n)}\right) ...rev\left(R_1^{(n)}\right) rev\left(R_0^{(n)}\right) \\ =&F_m^{(n)} rev\left(R_{[0\nearrow m-n-2]}^{(n)}\right) \\ =&F_m^{(n)} rev\left(G_{m-n}^{(n)}\right) \\ =&F_m^{(n)} G_{m-n}^{(n)}. \end{aligned}$$

従って，$G_m^{(n)} R_{m-1}^{(n)} = F_m^{(n)} G_{m-n}^{(n)}$ となる．ここで，$\left|F_m^{(n)}\right| > \left|G_m^{(n)}\right|$ なので，左辺の部分文字列 $G_m^{(n)}$ は右辺の部分文字列 $F_m^{(n)}$ の接頭辞である．また，右辺 $R_{m-1}^{(n)}$ の $\left|F_m^{(n)}\right| - \left|G_m^{(n)}\right|$ 文字分の接頭辞は $F_{m-1}^{(n)}$ の接尾辞 $\left|F_m^{(n)}\right| - \left|G_m^{(n)}\right|$ 文字を反転させたものと明らかに等しい．よって，

$$F_m^{(n)} = G_m^{(n)} rev\left(Last\left(F_{m-1}^{(n)},\ s(m, n)\right)\right).$$

□

次の補題は，$s(m,n)$ の定義から明らかである．

補題 3. $2 \leqq n \leqq m$ を満たす任意の整数 m，n について，$s(m, n) = \left|F_m^{(n)}\right| - \left|G_m^{(n)}\right|$ は次のように，n-ボナッチ数と 2 のべき乗の和で表現される．

$$s(m,\ n) = \sum_{i=1}^{n-2} \left(\sum_{j=i}^{m-n+i-1} \Phi_j^{(n)} \right) + 2^{n-1}.$$

特に，$s(m, 2) = 2$ となる．

例 4. $n = 3$，$m = 4$ の場合，

$$\begin{aligned} G_4^{(3)} &= R_0^{(3)} R_1^{(3)} R_2^{(3)} = \mathsf{abacaba}, \\ F_3^{(3)} &= \mathsf{abacaba}, \\ s(4,\ 3) &= \Phi_1^{(3)} + 2^{3-1} = 6. \end{aligned}$$

したがって，$G_4^{(3)}$ と $F_3^{(3)}$ の接尾辞 6 文字を反転させた文字列を連結すると，以下のように $F_4^{(3)}$ ができる．

$$\begin{aligned} &G_4^{(3)} rev\left(Last\left(F_3^{(3)},\ m(4,\ 3)\right)\right) \\ =&\mathsf{abacaba\ abacab} \\ =&F_4^{(3)}. \end{aligned}$$

■

また，$m \geqq 2$ を満たす任意の整数について $G_m^{(n)}$ は $F_m^{(n)}$ の接頭辞となるので，次の補題が成り立つ．

補題 4. $n \geqq 2$ の任意の整数 n について，$F_\infty^{(n)} = R_{[0\nearrow\infty]}^{(n)}$.

3. 主　定　理

前節では，n-ボナッチ文字列を隣接 n 項の文字列として定義したが，以下のように定義される準同型写像 $h_{(n)}:\Sigma^*\to\Sigma^*$ を用いることでも n-ボナッチ文字列を生成することができる．

定義 3. n を $n\geqq 2$ を満たす任意の整数とする．準同型写像 $h_{(n)}$ は，n 個の文字 σ_1，σ_2，$\cdots$，σ_n に対して以下のように作用する．

$$h_{(n)}(\sigma_i)=\begin{cases}\sigma_1\sigma_{i+1} & (1\leqq i\leqq n-1),\\ \sigma_1 & (i=n).\end{cases}\tag{3}$$

ここで，自然数 m と関数 f について，$f^m(x)$ を次のように帰納的に定義する．

$$f^m(x)=\begin{cases}x & (m=0),\\ f\left(f^{m-1}(x)\right) & (m\geqq 1).\end{cases}$$

補題 5. m 番目の n-ボナッチ文字列 $F_m^{(n)}$ は，準同型写像 $h_{(n)}$ を使うと次のようになる．

$$F_m^{(n)}=h_{(n)}^m(\sigma_1).\tag{4}$$

例 5. $n=3$ の場合，アルファベット $\Sigma=\{\mathrm{a},\ \mathrm{b},\ \mathrm{c}\}$ とすると，準同型写像 $h_{(3)}$ は，

$$h_{(3)}(\mathrm{a})=\mathrm{ab},$$
$$h_{(3)}(\mathrm{b})=\mathrm{ac},$$
$$h_{(3)}(\mathrm{c})=\mathrm{a}$$

となる．文字 a に $h_{(3)}$ を 4 回作用させると，

$$\begin{aligned}h_{(3)}^4(\mathrm{a})&=h_{(3)}^3\left(h_{(3)}(\mathrm{a})\right)\\&=h_{(3)}^3(\mathrm{ab})\\&=h_{(3)}^2(\mathrm{abac})\\&=h_{(3)}(\mathrm{abacaba})\\&=\mathrm{abacabaabacab}\\&=F_4^{(3)}\end{aligned}$$

となり，4 番目のトリボナッチ文字列 $F_4^{(3)}$ が生成された．■

ここで，$u_i\in\Sigma^*\ (1\leqq i\leqq n)$ である u_i の集合 $\Delta=\{u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n\}$ について，$\tilde{h}_{(n)}:\Delta^*\to\Delta^*$ を n 個の文字列 u_1，u_2，$\cdots$，u_n に対して以下のように作用するものと定義する．

$$\tilde{h}_{(n)}(u_i)=\begin{cases}u_1u_{i+1} & (1\leqq i\leqq n-1),\\ u_1 & (i=n).\end{cases}\tag{5}$$

つまり，文字列単位で式（3）と同様の変形を行う．ここで，**一般化 n-ボナッチ文字列**を

$$\tilde{F}_m^{(n)}(u_1,u_2,\ldots,u_n)=h_{(n)}^m(u_1).\tag{6}$$

と定義すると，次の補題が成り立つ．

補題 6. $u_1=\sigma_1$，$u_2=\sigma_2$，$\cdots$，$u_n=\sigma_n$ である場合，

$$F_m^{(n)}=\tilde{F}_m^{(n)}(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n).$$

証明. $u_1=\sigma_1$，$u_2=\sigma_2$，$\cdots$，$u_n=\sigma_n$ とすると，式（5）は式（3）と等しい．よって，式（4）と式（6）は明らかに等しい．□

$h_{(n)}^m$ は帰納的に定義されるので，$h_{(n)}^m(u_1)=h_{(n)}^{m-k}\left(h_{(n)}^k(u_1)\right)$ である．よって，式（6）から

$$\begin{aligned}&\tilde{F}_m^{(n)}(u_1,u_2,\ldots,u_n)\\=&\tilde{F}_{m-k}^{(n)}\left(h_{(n)}^k(u_1),h_{(n)}^k(u_2),\ldots,h_{(n)}^k(u_n)\right)\end{aligned}\tag{7}$$

となる．このことから，次の補題を得る．

補題 7. $n-1\leqq k\leqq m$ を満たす任意の整数 k，m，n（ただし，$n\geqq 2$）において，

$$\begin{aligned}&F_m^{(n)}\\=&\tilde{F}_{m-k}^{(n)}\left(F_k^{(n)},F_{[k-1\searrow k-n+1]}^{(n)},F_{[k-1\searrow k-n+2]}^{(n)},\ldots,F_{k-1}^{(n)}\right).\end{aligned}$$

証明. $u_1=\sigma_1,u_2=\sigma_2,\ldots,u_j=\sigma_n$ とする．式（4），(6)，(7) より，

$$F_m^{(n)}=\tilde{F}_{m-k}^{(n)}\left(h_{(n)}^k(\sigma_1),h_{(n)}^k(\sigma_2),\ldots,h_{(n)}^k(\sigma_n)\right).$$

ここで，$h_{(i)}^k\quad(1\leqq i\leqq n)$ についての数学的帰納法を考える．

$i=n$ の場合

$$h_{(n)}^k(\sigma_n)=h_{(n)}^{k-1}\left(h_{(n)}(\sigma_n)\right)=h_{(n)}^{k-1}(\sigma_1)=F_{k-1}^{(j)}.$$

$2\leqq i\leqq n-1$ の場合　ある i で

$$h_{(n)}^k(\sigma_i)=F_{[k-1\searrow k-n+(i-1)]}^{(n)}.\tag{8}$$

が成り立つと仮定する．$i-1$ において，

$$\begin{aligned}&h_{(n)}^k(\sigma_{i-1})\\=&h_{(n)}^{k-1}\left(h_{(n)}(\sigma_{i-1})\right)\\=&h_{(n)}^{k-1}(\sigma_1\sigma_i)\\=&F_{k-1}^{(n)}h_{(n)}^{k-1}(\sigma_i).\end{aligned}$$

帰納法の仮定から，

$$\begin{aligned}&h_{(n)}^k(\sigma_{i-1})\\=&F_{k-1}^{(n)}F_{[k-2\searrow(k-1)-n+i-1]}^{(n)}\\=&F_{[k-1\searrow(k-1)-n+i-1]}^{(n)}\\=&F_{[k-1\searrow k-n+((i-1)-1)]}^{(j)}.\end{aligned}$$

$i=1$ の場合　式（5）より，明らかに $h_{(n)}^m(\sigma_1)=F_m^{(n)}$．□

この補題は文字列 $F_{m-k}^{(n)}$ に出現する文字 σ_1，σ_2，$\cdots$，σ_n を次のように置換することで $F_m^{(n)}$ が生成されるというものである．

$$\begin{aligned}\sigma_1&\to F_k^{(n)},\\ \sigma_2&\to F_{[k-1\searrow k-n+1]}^{(n)},\\ &\vdots\\ \sigma_{n-1}&\to F_{[k-1\searrow k-2]}^{(n)},\\ \sigma_n&\to F_{[k-1\searrow k-1]}^{(n)}=F_{k-1}^{(n)}.\end{aligned}$$

例 6. $n=3$，$m=9$，$k=6$ の場合，

$F^{(3)}_{9-6}=F^{(3)}_{3}$ =abacaba.

ここで，a $\to F^{(n)}_6$，b $\to F^{(n)}_5F^{(n)}_4$，c $\to F^{(n)}_5$ とすると，

$$
\begin{aligned}
&F^{(3)}_6F^{(3)}_5F^{(3)}_4F^{(3)}_6F^{(3)}_5F^{(3)}_6F^{(3)}_5F^{(3)}_4F^{(3)}_6\\
=&F^{(3)}_7F^{(3)}_6F^{(3)}_5F^{(3)}_7F^{(3)}_6\\
=&F^{(3)}_8F^{(3)}_7F^{(3)}_6\\
=&F^{(3)}_9.
\end{aligned}
$$

■

したがって，m 番目の n-ボナッチ文字列中における k 番目の n-ボナッチ文字列の繰り返しを探すには，$m-k$ 番目の n-ボナッチ文字列における文字の出現を見ればよいことになる．そこで，m 番目の n ボナッチ文字列における文字の出現の様子について次の補題を与える．

補題 8. *(i)* 部分文字列 σ_1^3 は n-ボナッチ文字列中には出現しない．
(ii) 部分文字列 $\sigma_s\sigma_t$ $(2\leqq s,\ t\leqq n)$ は n-ボナッチ文字列中には出現しない．

証明. m についての数学的帰納法を考える．
$m=0$ の場合　$F^{(n)}_0=\sigma_1$ なので明らか．
$1\leqq m\leqq n-1$ の場合　ある m において，$F^{(n)}_m$ が仮定を満たすとする．このとき，$F^{(n)}_m$ は部分文字列 $F^{(n)}_{[m-1\searrow 0]}$ を含むが，式（1）より，これも帰納法の仮定を満たす．$F^{(n)}_{m+1}$ は，部分文字列として $F^{(n)}_m$ と $F^{(n)}_{[m-1\searrow 0]}$ を含む．ここで，$F^{(n)}_m$ の接尾辞 2 文字と $F^{(n)}_{m-1}$ の接頭辞 2 文字を連結した文字列は $\sigma_1\sigma_m\sigma_1\sigma_2$ である．これは仮定を満たす文字列である．よって，$F^{(n)}_m$ と $F^{(n)}_{[m-1\searrow 0]}$ の連結文字列 $F^{(n)}_{[m\searrow 0]}$ は仮定を満たす文字列となる．さらに，$F^{(n)}_0$ と σ_{m+2} を連結した文字列も明らかに仮定を満たす．よって，式（1）より，$F^{(n)}_{m+1}$ は仮定を満たす文字列である．
$m=n$ の場合　式（1）より，$F^{(n)}_n=F^{(n)}_{[n-1\searrow 0]}$ である．部分文字列 $F^{(n)}_iF^{(n)}_{i-1}$ $(2\leqq i\leqq n-1)$ の連結部に出現する文字列は $\sigma_1\sigma_{i+1}\sigma_1\sigma_2$ である．また，部分文字列 $F^{(n)}_1F^{(n)}_0$ に出現する文字列は $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$ である．いずれも帰納法の仮定を満たすので，$F^{(n)}_n$ は仮定を満たす文字列である．
$m\geqq n+1$ の場合　式（1）より，$F^{(n)}_m=F^{(n)}_{[m-1\searrow m-n]}$ である．$F^{(j)}_{n-1}$，$F^{(j)}_{n-2}$，$\cdots$，$F^{(n)}_{m-n}$ がそれぞれ帰納法の仮定を満たすとする．それぞれの文字列の連結部に現れる文字列は $\sigma_1\sigma_i\sigma_1\sigma_2$ $(2\leqq i\leqq n)$ または $\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2$ である．これらの文字列は仮定を満たす．よって，$F^{(n)}_m$ は仮定を満たす文字列である．□

補題 7，8 から，k 番目の n-ボナッチ文字列の繰り返しについて次の定理を得る．

定理 1. $m-k\geqq n+1$ および $n\geqq 2$ を満たす任意の m，n，k において，$F^{(n)}_m$ 中に出現する $F^{(n)}_k$ の最長の連続出現は $F^{(n)}_kF^{(n)}_kF^{(n)}_kG^{(n)}_{k-n+1}$ である．

証明. 補題 8 から，$m-k\geqq n+1$ において文字列 $F^{(n)}_{m-k}$ は部分文字列 $\sigma_2\sigma_1\sigma_1\sigma_2$ を含む．よって，$F^{(n)}_{m-k}$ に補題 7 を適用することにより，$F^{(n)}_m$ は $F^{(n)}_kF^{(n)}_kF^{(n)}_{[k-1\searrow k-n+1]}F^{(n)}_k$ を部分文字列として持っていることが分かる．ここで，$F^{(n)}_{[k-1\searrow k-n+1]}F^{(n)}_k$ に注目すると，

$$
\begin{aligned}
&F^{(n)}_{[k-1\searrow k-n+1]}F^{(n)}_k\\
=&F^{(n)}_{[k-1\searrow k-n+1]}G^{(n)}_k rev\left(Last\left(F^{(n)}_{k-1},\ s(k,\ n)\right)\right)\\
=&F^{(n)}_{[k-1\searrow k-n+1]}R^{(n)}_{[0\nearrow k-n]}R^{(n)}_{[k-n+1\nearrow k-2]}rev\left(Last\left(F^{(n)}_{k-1},\ s(k,\ n)\right)\right)\\
=&F^{(n)}_{[k-1\searrow k-n+1]}G^{(n)}_{k-n+2}R^{(n)}_{[k-n+1\nearrow k-2]}rev\left(Last\left(F^{(n)}_{k-1},\ s(k,\ n)\right)\right)\\
=&F^{(n)}_{[k-1\searrow k-n+1]}rev\left(G^{(n)}_{k-n+2}\right)R^{(n)}_{[k-n+1\nearrow k-2]}rev\left(Last\left(F^{(n)}_{k-1},\ s(k,\ n)\right)\right)\\
=&F^{(n)}_{[k-1\searrow k-n+1]}F^{(n)}_{[k-n\searrow 0]}R^{(n)}_{[k-n+1\nearrow k-2]}rev\left(Last\left(F^{(n)}_{k-1},\ s(k,\ n)\right)\right)\\
=&F^{(n)}_{[k-1\searrow k-n]}F^{(n)}_{[k-n-1\searrow 0]}R^{(n)}_{[k-n+1\nearrow k-2]}rev\left(Last\left(F^{(j)}_{k-1},\ s(k,\ n)\right)\right)\\
=&F^{(n)}_k rev\left(R^{(n)}_{[0\nearrow k-n-1]}\right)R^{(n)}_{[k-n+1\nearrow k-2]}rev\left(Last\left(F^{(n)}_{k-1},\ s(k,\ n)\right)\right)\\
=&F^{(n)}_kG^{(n)}_{k-n+1}R^{(n)}_{[k-n+1\nearrow k-2]}rev\left(Last\left(F^{(n)}_{k-1},\ s(k,\ n)\right)\right)
\end{aligned}
$$

となる．よって，部分文字列 $F^{(n)}_kF^{(n)}_kF^{(n)}_{[k-1\searrow k-n+1]}F^{(n)}_k$ は接頭辞として $F^{(n)}_kF^{(n)}_kF^{(n)}_kG^{(n)}_{k-n+1}$ を持つ．$G^{(n)}_{k-n+1}$ は $F^{(n)}_n$ の接頭辞なので，$F^{(n)}_kF^{(n)}_kF^{(n)}_kG^{(n)}_{k-n+1}$ は $F^{(n)}$ の連続出現である．

また，文字列 $F^{(n)}_{m-k}$ には，補題 8 より部分文字列として他に $\sigma_1\sigma_i\sigma_1$ $(2\leqq i\leqq n)$ が存在する．これに補題 7 を適用すると，

$$
\begin{aligned}
&F^{(n)}_kF^{(n)}_{[k-1\searrow k-n+i-1]}F^{(n)}_k\\
=\ &F^{(n)}_kF^{(n)}_{[k-1\searrow k-n+i-1]}G^{(n)}_k rev\left(Last\left(F^{(n)}_{k-1},\ s(k,\ n)\right)\right)\\
=\ &F^{(n)}_kF^{(n)}_{[k-1\searrow k-n+i-1]}\left(F^{(n)}_{[k-n+i-2\searrow k-n]}F^{(n)}_{[k-n-1\searrow 0]}\right)\\
&\qquad R^{(n)}_{[k-n+i-1\nearrow k-2]}rev\left(Last\left(F^{(n)}_{k-1},\ s(k,\ n)\right)\right)\\
=\ &F^{(n)}_kF^{(n)}_kG^{(n)}_{k-n+1}R^{(n)}_{[k-n+i-1\nearrow k-2]}rev\left(Last\left(F^{(n)}_{k-1},\ s(k,\ n)\right)\right)
\end{aligned}
$$

となる．よって，$F^{(n)}_k$ の連続出現は $F^{(n)}_kF^{(n)}_kG^{(n)}_{k-n+1}$ である．

以上のことから，$F^{(n)}_m$ 中に出現する $F^{(n)}_k$ の最長の連続出現は $F^{(n)}_kF^{(n)}_kF^{(n)}_kG^{(n)}_{k-n+1}$ である．□

$F^{(n)}_k$ の繰り返し回数については次の定理が成り立つ．

定理 2. $m-k\geqq n+1$ および $n\geqq 2$ を満たす任意の m，n，k において，$F^{(n)}_m$ 中の $F^{(n)}_k$ の最大繰り返し数の極限は $2+1/(\phi^{(n)}-1)$ である．

証明. 整数 m，n，k が $m-k\geqq n+1$ を満たすとき，文字列 $F^{(n)}_m$ における $F^{(n)}_k$ の最大繰り返し数を $e^{(n)}_k$ とする．定理 1 より，$F^{(n)}_m$ における $F^{(n)}_k$ の最長の連続出現は $F^{(n)}_kF^{(n)}_kF^{(n)}_kG^{(n)}_{k-n+1}$ である．よって，

$$
\begin{aligned}
e^{(n)}_k=&\frac{3\left|F^{(n)}_k\right|+\left|G^{(n)}_{k-n+1}\right|}{\left|F^{(n)}_k\right|}\\
=&2+\frac{\left|F^{(n)}_{[k-1\searrow k-n]}\right|+\displaystyle\sum_{i=0}^{k-n-1}\left|F^{(n)}_i\right|}{\left|F^{(n)}_k\right|}\\
=&2+\frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}\Phi^{(n)}_i}{\Phi^{(n)}_k}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

ここで，x_i $(1 \leqq i \leqq n)$ を n-ボナッチ数を求める漸化式の特性方程式

$$x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \ldots + x + 1 \tag{10}$$

の解とする．n が偶数のとき，方程式（10）は 1 より大きい正の実数解 x_1 と -1 より大きい負の実数解 x_n を持つ．また，n が奇数の場合，方程式（10）は 1 より大きい正の実数解 x_1 を持つ．いずれの場合も，他の解は絶対値が 1 未満の共役複素数解である [12]．x_i と多項式

$$Q_n(x_i) = \sum_{j=0}^{n-1} t_j x_i^j, \quad t_j = \begin{cases} -1 & (j = 0), \\ 2(n-1) & (j = 1), \\ n - i - 2 & (j \geqq 2). \end{cases}$$

を用いると，n-ボナッチ数 $\Phi_k^{(n)}$ の一般項は

$$\Phi_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k+2}}{Q_n(x_i)}$$

となる．ところで，$\bar{x}_i$ を x_i の複素共役数とし，a_i，b_i をそれぞれ x_i の実部，虚部とすると，

$$\begin{aligned} &\frac{x_i^m}{Q_n(x_i)} + \frac{\bar{x}_i^m}{Q_n(\bar{x}_i)} \\ =&\frac{2a_i}{a_i^2 + b_i^2} Re(x_i^m) + \frac{2b_i}{a_i^2 + b_i^2} Im(x_i^m) \end{aligned}$$

となり，これは実数である．今，x_i の実部と虚部のそれぞれの絶対値は 1 未満なので，$m \to \infty$ とすると，$Re(x_i^m)$ と $Im(x_i^m)$ の値はともに 0 に近づく．簡単のために，n を奇数として式 (9) を変形すると，

$$\begin{aligned} &e_k^{(n)} \\ =&2 + \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{j+2}}{Q_n(x_i)}}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^{k+2}}{Q_n(x_i)}} \\ =&2 + \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x_1^{j+2}}{Q_n(x_1)} + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{a_i}{a_i^2 + b_i^2} Re(x_i^{j+2}) + \frac{b_i}{a_i^2 + b_i^2} Im(x_i^{j+2}) \right)}{\displaystyle\frac{x_1^{k+2}}{Q_n(x_1)} + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{a_i}{a_i^2 + b_i^2} Re(x_i^{j+2}) + \frac{b_i}{a_i^2 + b_i^2} Im(x_i^{j+2}) \right)} \\ =&2 + \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x_1^{j+2}}{x_1^{k+2}} + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{a_i Q_n(x_1)}{a_i^2 + b_i^2} \frac{Re(x_i^{j+2})}{x_1^{k+2}} + \frac{b_i Q_n(x_1)}{a_i^2 + b_i^2} \frac{Im(x_i^{j+2})}{x_1^{k+2}} \right)}{\displaystyle 1 + \sum_{i=2}^{n} \left(\frac{a_i Q_n(x_1)}{a_i^2 + b_i^2} \frac{Re(x_i^{k+2})}{x_1^{k+2}} + \frac{b_i Q_n(x_1)}{a_i^2 + b_i^2} \frac{Im(x_i^{j+2})}{x_1^{k+2}} \right)} \end{aligned}$$

となる．ここで，分子の第 1 項 $\sum_{j=0}^{k-1} (x_1^{j+2}/x_1^{k+2})$ は次のようになる．

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{x_1^{j+2}}{x_1^{k+2}} = \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{1}{x_1} \right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{x_1} \right)^k}{x_1 - 1}.$$

よって，

$$\lim_{k \to \infty} e_k^{(n)} = 2 + \frac{1}{x_1 - 1}.$$

n が偶数の場合でも同様な結果が得られる．方程式（10）の正の実数解 x_1 がまさに n-ボナッチ定数 $\phi^{(n)}$ なので，

$$\lim_{k \to \infty} e_k^{(n)} = 2 + \frac{1}{\phi^{(n)} - 1}. \tag{11}$$

□

系 1 ([8]). $n = 2$ のとき，k 番目のフィボナッチ文字列 $F_k^{(2)}$ の最大繰り返し数の極限は $2 + \phi$ である．ここに，$\phi = \phi^{(2)} = (1 + \sqrt{5})/2$ である．

証明. フィボナッチ定数 ϕ は，方程式

$$\phi^2 = \phi + 1$$

を満たす．これを変形すると，

$$\frac{1}{\phi - 1} = \phi$$

となる．$\phi = \phi^{(2)}$ なので，式（11）代入して

$$\lim_{k \to \infty} e_k^{(2)} = 2 + \frac{1}{\phi^{(2)} - 1} = 2 + \phi.$$

□

定理 3. 整数 n，$k \to \infty$ のとき，n-ボナッチ文字列 $F_k^{(n)}$ の最大繰り返し数はちょうど *3* に近づく．

証明. n を大きくしていくと，n-ボナッチ定数 $\phi^{(n)}$ の値は 2 に近づくことが知られている．ここで

$$\phi^{(\infty)} = \lim_{n \to \infty} \phi^{(n)} = 2$$

とすると，定理 2 より明らかである． □

いま，この定理を n-ボナッチ定数の極限値を取るという観点から導いたが，∞-ボナッチ文字列というものを以下のように定義することでも同様の定理が導かれる．

定義 4. アルファベット Σ を $\Sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots\}$，$F_m^{(\infty)}$ を m 番目の ∞-ボナッチ文字列とするとき，∞-ボナッチ文字列を以下のように定義する．

$$F_0^{(\infty)} = \sigma_1, \quad F_m^{(\infty)} = F_{[m-1 \searrow 0]}^{(\infty)} \sigma_{m+1} \ (m \geqq 1).$$

$\Phi_m^{(\infty)}$ を m 番目の ∞-ボナッチ数とすると，$\left| F_m^{(\infty)} \right| = \Phi_m^{(\infty)} = 2^m$ である．式（9）より，

$$e_k^{(\infty)} = 2 + \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} 2^i}{2^k} = 2 + \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{1}{2} \right)^i$$

となる．よって，

$$\lim_{k \to \infty} e_k^{(\infty)} = 2 + \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 3$$

となり，定理 3 と同様の結果となる．

4. ま と め

本研究では，隣接 2 項の漸化式で定義されるフィボナッチ文字列を隣接 n 項で定義される n-ボナッチ文字列に拡張し，その部分文字列の繰り返し構造の解析を行った．n-ボナッチ定数 $\phi^{(n)}$ は無理数なので，n-ボナッチ文字列の最大繰り返し数の極限 $2 + 1/(\phi^{(n)} - 1)$ も無理数である．したがって，繰り返し数が $2 + 1/(\phi^{(n)} - 1)$ と等しくなるようなことは無い．ある m において，n が大きくなるにつれて文字列 $F_m^{(n)}$ は長くなっていくので，その中の部分文字列の繰り返し数も増えていくように思われる．しかし，実際にはその数が 3 に近づくように減少する．

謝辞　有益な助言を多数くださった九州大学の稲永俊介先生にこの場を借りて感謝します．

文　献

[1] M. Crochemore and W. Rytter: “Jewels of Stringology”, World Scientific (2003).
[2] W. Rytter: “The structure of subword graphs and suffix trees of Fibonacci words”, Theoret. Comput. Sci., **363**, pp. 211–233 (2006).
[3] B. Smith: “Computing Patterns in Strings”, Addison Wesley (2003).
[4] J. H. M. J. D. E. Knuth and V. R. Pratt: “Fast pattern matching in strings”, SIAM J. Comput, **6**, pp. 323–350 (1977).
[5] R. S. Boyer and J. S. Moore: “A fast string-searching algorithm”, Comm. ACM, **20**, pp. 762–772 (1977).
[6] A. V. Aho and M. Corasick: “Efficient string matching: An aid to biblographic search”, Comm. ACM, **18**, pp. 333–340 (1975).
[7] A. Aho: “Algorithms for finding patterns in strings”, HandBook of Theoretical Computer Science, Volume A: Algorithm and Complexity, Elsevier, pp. 255–300 (1990).
[8] F. Mignosi and G. Pirillo: “Repetitions in the Fibonacci infinite word”, RAIRO Theoret. Inform. Appl., **26**, pp. 199–204 (1992).
[9] J. B. Borel and C. Reutenauer: “Palindromic factors of billiard words”, Theoret. Comput. Sci., **340**, pp. 334–348 (2005).
[10] J. Berstel: “Recent results on extensions of Stumian words”, Internat. J. Algebra Comput (2002).
[11] M. Lothaire: “Applied Combinatorics on Words”, Cambridge University Press (2005).
[12] I. Flores: “Direct calculation of k-generalized Fibonacci numbers”, FIbonacci quarterly, **5**, pp. 259–266 (1967).